

Entendiendo el caos a través de un circuito jerk

José Mendoza
Departamento de Física
Universidad de Oriente
Cumaná, Venezuela
Email: jamendoza@udo.edu.ve

Luis Araque-Lameda
Departamento de Física
Universidad de Oriente
Cumaná, Venezuela
Email: aralameda@gmail.com

Eliezer Colina-Morles
Departamento de Ingeniería Eléctrica,
Electrónica y Telecomunicaciones
Universidad de Cuenca, Ecuador
E-mail: eliezer.colina@ucuenca.edu.ec

Resumen—Se modeló e implementó un circuito jerk sencillo para estudiar su dinámica caótica mediante las variables teóricas, \ddot{x} , \dot{x} , x y x , y sus equivalentes salidas experimentales, las cuales presentaron un comportamiento caótico dependiente del valor de un sólo parámetro $A \propto 1/R_A$. Variando el valor A permitió observar la bifurcación y su evolución hacia el caos, lo que facilitó entender el comportamiento caótico de un circuito de fácil implementación.

Index Terms—Caos, circuitos caóticos, circuitos jerk.

I. INTRODUCCIÓN

ACTUALMENTE, científicos de diferentes campos están interesados en estudiar el caos que se observa en diversas disciplinas, tales como la biología, la química, la informática, entre otras [1]. Por lo tanto, se hace indispensable desarrollar modelos teóricos que permitan entender la dinámica caótica de tales sistemas; que se puedan validar con facilidad bien sea mediante la simulación y/o la experimentación. Aunque en la literatura ya existen muchas herramientas experimentales basadas en circuitos electrónicos que permiten estudiar ciertos comportamientos caóticos, sin embargo, por lo general son bastante complicados ya que pueden requerir varios elementos no lineales en su construcción, por ejemplo los circuitos tipo chuas [2]. Además, algunos de estos circuitos requieren inductancias en su implementación. Estas inductancias, con sus impedancias inherentes, pueden introducir parámetros incontrolables y limitar la aplicabilidad al estudio del caos. Por lo tanto, en este trabajo se utiliza un circuito electrónico relativamente sencillo, conocido como circuito jerk, que no requiere elementos inductivos y que permite entender ciertos comportamientos caóticos, [3].

II. SISTEMA DE ECUACIONES DE JERK

El desarrollo de modelos de sistemas con comportamientos caóticos a través de ecuaciones diferenciales no-lineales, con más de dos dimensiones, y con valores adecuados tanto en sus condiciones iniciales como en sus parámetros, está bien documentada en la literatura [4], [5], [6], [7]. A pesar de los avances sobre el estudio del caos durante las últimas décadas, todavía hay muchas preguntas sin responder. Un ejemplo es: ¿Cuáles son los requerimientos mínimos, necesarios y suficientes para que un sistema dinámico pueda exhibir caos? La

respuesta completa a esto sigue siendo desconocida, aunque los requerimientos necesarios ya son bien conocidos. Por ejemplo, el teorema de Poincaré-Bendixson (PB) [8], explica para que un sistema dinámico autónomo de tiempo continuo genere un comportamiento caótico requiere por lo menos tres dimensiones en el espacio de fase y al menos una no-linealidad como es de esperar de un fenómeno no-lineal caótico típico. Sin embargo, no se tiene certeza, incluso para el caso más sencillo de los sistemas dinámicos tridimensionales, de cuál es el grado de no-linealidad suficiente para la existencia de caos. Esto es una de las razones por la que no se conoce una forma funcional mínima para representar los campos vectoriales caóticos tridimensionales y, por lo tanto, abre un campo en gran parte inexplorado [9].

Ya se han estudiado sistemas con un mínimo de un término no-lineal y se ha visto que sus soluciones se vuelven más interesantes cuando las dimensiones del flujo aumenta; este flujo es el patrón completo de las trayectorias en el espacio de fase (plano x, \dot{x}) [10]. Estos sistemas pueden generar puntos fijos en una dimensión; también, pueden generar sillas, nodos y ciclos límite en dos dimensiones; además, en tres dimensiones, pueden generar atractores extraños y ser sensibles a las condiciones iniciales, por lo tanto, se puede decir que estos sistemas tienen las propiedades generales de “caos”.

Sprott encontró en 1994 varias ecuaciones simples que pueden tener comportamientos caóticos y que admiten representaciones mediante campos vectoriales tridimensionales, con cinco términos, entre ellos dos no-lineales o de seis términos con una sola no-linealidad cuadrática o cúbica [11]. Posteriormente, en 1996, Gottlieb [12] reportó que varios modelos de Sprott pueden redefinirse en una forma de tercer orden explícita $\ddot{x} = J(x, \dot{x}, \ddot{x})$, que llamó ‘función de jerk’. El término jerk, deducido principalmente por Schot [14], involucra la derivada tercera del desplazamiento, x , que en un sistema mecánico es la razón de cambio en el tiempo de la aceleración de un objeto. Esta es la *dinámica jerk* [15]. Esta dinámica puede describirse a través de un conjunto de tres ecuaciones diferenciales ordinarias simultáneas de primer orden, donde las variables dependientes son: la posición x , la

velocidad \dot{x} y la aceleración \ddot{x} . En forma general

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \dot{x} = v, \\ \frac{d\dot{x}}{dt} &= \ddot{x} = a, \\ \frac{d^2\dot{x}}{dt^2} &= \ddot{\dot{x}} = -A\ddot{x} - B\dot{x} + G(x).\end{aligned}\quad (1)$$

Sprott llamó el último término de este sistema de ecuaciones, la *ecuación jerk* [16], donde $G(x)$ es una función no-lineal, los parámetros A y B son dos constantes numéricas. Él encontró que para valores de $A \approx 0,6$ y $B \approx 1$, las soluciones son caóticas para diferentes funciones, $G(x)$, no-lineales.

La principal ventaja, como puede verse, de reducir un sistema dinámico a un sistema jerk es que cualquier ecuación diferencial ordinaria puede redefinirse a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden acoplado, lo contrario no se mantiene en general. Esto genera una conexión entre la dinámica no-lineal en el espacio de fase en tres dimensiones y una dinámica jerk unidimensional [17]. Esta conexión ha permitido estudiar algunos sistemas dinámicos que representados con ecuaciones jerk generan soluciones periódicas [18].

Incluso se puede reducir un sistema a una forma jerk para cada una de las variables del espacio de fase, sin embargo, la ecuación diferencial resultante puede ser muy diferente, es decir, que puede haber diferentes formas jerk posibles de un mismo sistema dinámico simple. A pesar de esto, tal reducción es muy relevante para estudiar los comportamientos dinámicos de ciertos sistemas no-lineales caóticos o no-caóticos [13].

De hecho, los sistemas descritos por Lorenz y Rössler se describen convencionalmente como un sistema de tres ecuaciones diferenciales de primer orden, también se pueden combinar en una sola ecuación jerk, sin embargo, son algo complicadas y no son buenas candidatas para una función jerk más simple.

Sprott demostró que la representación de un sistema dinámico en la forma jerk, ec. (1), es relativamente más simple que cualquier otro para diseñar un circuito electrónico experimental. También reportó que todos los sistemas descubiertos y estudiados por él comparten una ruta común hacia el caos con doble-período.

Otros estudios han considerado la función jerk como un polinomio no-lineal a trozos; por ejemplo, Linz y Sprott [19] han investigado exhaustivamente a un sistema que genera un flujo caótico disipativo, que es algebraicamente más simple ya que contiene una no-linealidad representada mediante un valor absoluto, es decir, $\ddot{x} = -A\ddot{x} - \dot{x} + |x| - 1$ y para $A \approx 0,6$, muestra un comportamiento caótico. También establece que este sistema cuando va hacia el caos exhibe doble-período y asemeja a la función jerk cuadrática.

En un estudio experimental posterior, Sprott [20] consideró de nuevo el caso $\ddot{x} = -A\ddot{x} - \dot{x} + G(x)$, donde $G(x)$ es una función a trozo elemental. Estudió una serie de funciones lineales a trozos experimentalmente

y enumeró los parámetros correspondientes al comportamiento caótico.

III. MODELO DEL SISTEMA JERK

Algunas de los sistemas jerk encontrados por Sprott tienen funciones no-lineales simples que permiten implementaciones electrónicas relativamente fáciles. Además, una de las más interesantes propiedades de tales sistemas es la posibilidad de generar caos [21]. Por lo cual, representar un modelo del sistema jerk a través de un circuito electrónico tiene aplicaciones prácticas, por ejemplo, en la generación de señales caóticas para emular ruidos como seguridad en un sistema de comunicaciones [20]. Esta clase de circuito es fácil de construir, además es, re-escalable, analizable, predecible y controlable con una gran exactitud.

La ecuación jerk, dada en la lista de Sprott, escogida en este trabajo para simular un circuito electrónico y posteriormente estudiar su dinámica caótica a través de sus atractores extraños y el diagrama de bifurcación, fue la siguiente:

$$\ddot{x} + A\ddot{x} + B\dot{x} - |x| + 1 = 0 \quad (2)$$

Puede verse que en la ecuación (2) hay una sola no-linealidad en la forma de valor absoluto de la variable dinámica. Sprott y Linz [21] verificaron el comportamiento caótico de esta ecuación usando los parámetros $A \approx 0,6$ y $B \approx 1$ y las condiciones iniciales, $\ddot{x} = \dot{x} = x = 0$.

Además, el caos existe si hay pequeñas variaciones de los valores de A y B ; variando el valor de A el sistema puede exhibir un doble período cuando va hacia el caos; por otro lado, el valor de B afecta sólo el tamaño del atractor, y la cuenca de atracción aumenta o disminuye proporcionalmente respecto a este valor. Si alguno de los términos de la ecuación (2) toma el valor cero no puede existir caos. El caos también se produce si los signos de los dos últimos términos de esta la ecuación se invierten, dando un atractor que es una imagen reflejada del atractor original sobre el plano $x = 0$. También se ha demostrado que el caos es posible si $|x|$ se sustituye con $|x^n|$, $|x|^n$ o x^{2n} con n como un número entero positivo, o más generalmente con cualquier función de inversión simétrica de $f(x) = f(-x)$.

IV. DESCRIPCIÓN DEL CIRCUITO

La ecuación (2) se ha implementado en la forma de un circuito electrónico usando el amplificador operacional (Op-amp) TL082, diodos rectificador 1N4007, diferentes resistencias y capacitores, como se muestra en la figura 1. El TL082 se utilizó para minimizar la deriva debido al *offset* y la corriente de polarización. Los amplificadores operaciones inversores señalados en la figura 1 como Op-amp0, Op-amp1 y Op-amp2 se utilizan como integradores para obtener, respectivamente, x , $-\dot{x}$ y \ddot{x} de $-\ddot{x}$. El

Op-amp3 se utiliza como un amplificador de ganancia unitaria.

El parámetro A que aparece en la ecuación (2) permite relacionar la resistencia R con la resistencia variable R_A , esto es

$$R_A = \frac{R}{A} \quad (3)$$

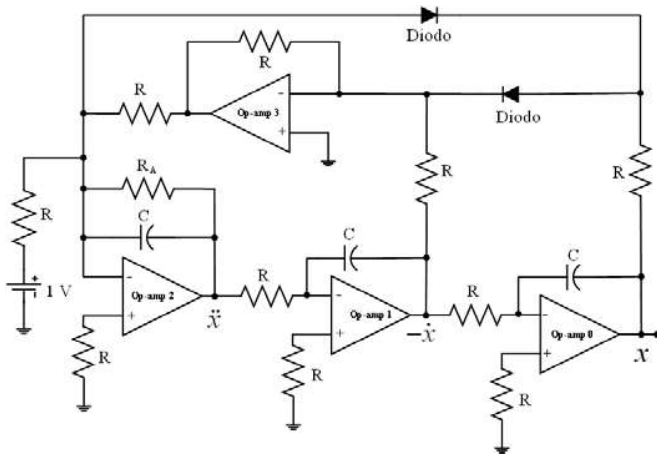


Figura 1. Diagrama del circuito jerk.

mientras que $B = 1$. La batería es de 1 volt, todas las resistencias tienen el mismo valor, excepto R_A , y todos los capacitores son de igual valor.

En este circuito jerk la alimentación conmuta entre encendido y apagado, esto se repite muchas veces hasta que los capacitores se mantenga en condiciones de estado estacionario. Asimismo, el circuito también tendría hacia una cuenca a atracción donde la dinámica sería ilimitada, lo que podría saturar los amplificadores operacionales y por lo tanto sería necesario reiniciar el circuito. Sin embargo, una de las características importante de este circuito jerk es que se puede manejar la dinámica del sistema a través de un solo parámetro, en este caso, es la resistencia variable R_A que se ajusta de manera que A este fuera o dentro de la región de caos de acuerdo con su *número de Feigenbaum* [22]. La frecuencia propia de oscilación del circuito está dada por $1/(2\pi R_A C)$.

V. RESULTADOS

Para la simulación numérica del sistema jerk se usó MATLAB 2012 para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales y obtener x , \dot{x} y \ddot{x} para los diferentes valores del parámetro A .

Se observaron las diferentes respuestas al variar el valor de A . En la figura 2 se muestra la respuesta temporal, figura 2a, y el atractor, figura 2b, con periodo-1 para un valor de $A = 0,83$ ($R_A = 1200 \Omega$), también puede observar que la dinámica del sistema no tiene un comportamiento caótico.

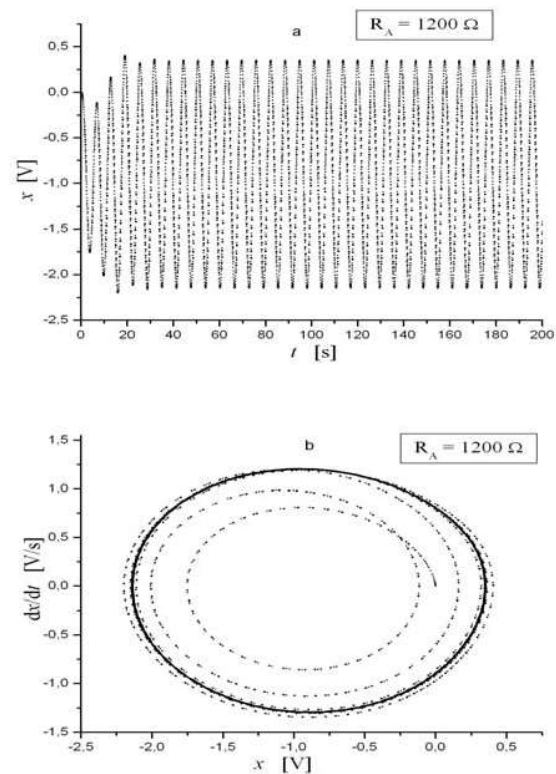


Figura 2. Resultados de la simulación numérica para un valor de $R_A = 1200 \Omega$ o $A = 0,83$, periodo-1, (a) respuesta temporal, (b) atractor.

En la figura 3, se muestra la respuesta temporal y el atractor con periodo-2, para $A = 0,69$ ($R_A = 1450 \Omega$), notándose el comienzo del caos.

Cómo puede verse en figura 4, las respuestas tienen periodo-4 para un valor de $A = 0,65$ ($R_A = 1550 \Omega$), se puede ver claramente la dinámica caótica del sistema.

Mientras que en la figura 5 pueden verse la respuesta temporal y el atractor con periodo-6 para $A = 0,58$ ($R_A = 1730 \Omega$), donde hay un comportamiento completamente caótico.

En la figura 6 puede verse el diagrama de bifurcación del sistema jerk, cuando el parámetro A varía de 0,83 ($R_A = 1200 \Omega$) hasta 0,58 ($R_A = 1730 \Omega$), en este diagrama se observa que la bifurcación empieza aproximadamente en $A \approx 0,74$ ($R_A \approx 1350 \Omega$).

La implementación del circuito jerk de la figura 1 fue ensamblado en el laboratorio. Para medir las salidas del circuito se utilizó un osciloscopio analógico de 30 MHz. El valor de cada resistor R es de $1 \text{ k}\Omega$ y el valor de cada capacitor C es de $0,1 \mu\text{F}$. Se utilizó un potenciómetro de $3 \text{ k}\Omega$ para darle valor a R_A . Las condiciones iniciales, $i_0(t = 0)$, del circuito implementado dependen de muchos factores, tal como voltajes de *offset* de los amplificadores operacionales, los remanentes de la corriente eléctrica, los voltajes de polarización interna

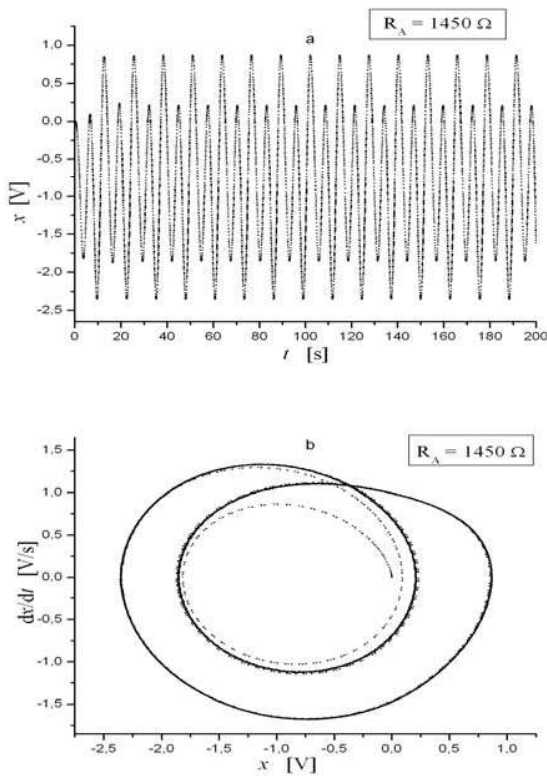


Figura 3. Resultados de la simulación numérica para un valor de $R_A = 1450 \Omega$ o $A = 0,69$, periodo-2, (a) respuesta temporal, (b) atractor.

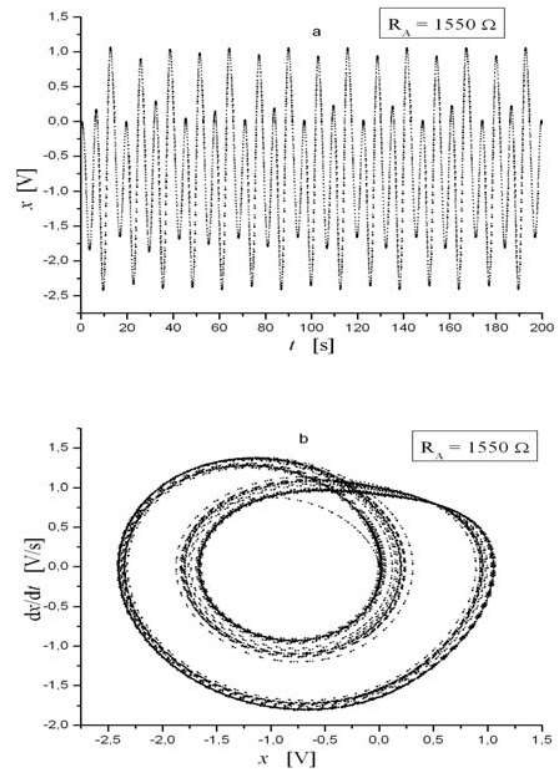


Figura 4. Resultados de la simulación numérica para un valor de $R_A = 1550 \Omega$ o $A = 0,65$, periodo-4, (a) respuesta temporal, (b) atractor.

de cada operacional, entre otros. Por lo tanto, hay que tomar en cuenta que las condiciones iniciales del sistema pueden diferir de cero a la hora de generar oscilaciones caótica cuando el circuito es inicializado.

En las figuras 7, 8, 9 y 10, pueden verse los atractores generados experimentalmente para valores de resistencias de $R_A = 1200 \Omega$, $R_A = 1450 \Omega$, $R_A = 1550 \Omega$ y $R_A = 1730 \Omega$, respectivamente.

VI. CONCLUSIÓN

El modelo del circuito jerk y su implementación experimental usado en este trabajo presenta varias ventajas prácticas. En primer lugar, el sistema de ecuaciones es sencillo, y su no linealidad es fácil de implementar. En segundo lugar, los componentes pasivos son estrictamente lineales y no varían con el tiempo. En tercer lugar, el número de componentes del circuito es mínimo. Además, lo más importante, los componentes del circuito son generales y robustos; y se pueden comparar en cualquiera tienda de electrónica, con sustituciones mínimas. El diseño de los componentes y sus tolerancias no son particularmente críticos. El circuito se ha construido con éxito utilizando capacitores electrolíticos de película de aluminio y resistores de carbón de bajo costo. En principio, el circuito generado ofrece una versión

igualitaria para la vía hacia el caos, accesible tanto para un estudiante como para un entusiasta, sin dejar de ofrecer una visión de un ingeniero o un teórico.

El modelo teórico y su ensamblado electrónico presentan resultados coincidentes como puede verse en los diagramas de sus atractores. Sus respuestas caóticas se pueden controlar mediante los valores del parámetro A (ó R_A), lo que permite seguir la evolución hacia el caos, como se muestra en las figuras; lo que podría facilitar el entendimiento de la dinámica caótica.

REFERENCIAS

- [1] S.H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, Perseus Books Publishing, L.L.C., New York, USA, 1994.
- [2] M.A. van Wyk and W.-H. Steeb, *Chaos in Electronics*. Springer, 1997.
- [3] J.C. Sprott, "A new chaotic jerk circuit," *IEEE Trans. Circ. Syst. II: Express Briefs* 58:240-243, 2011.
- [4] E. Lorenz, "Deterministic nonperiodic flow," *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20 (2), 130-141, 1963.
- [5] O.E. RöSSLER, "An Equation for Continuous Chaos," *Phys. Lett. A*, 57, 397-398, 1976.
- [6] T. Endo and L.O. Chua, "Chaos from phase-locked loops," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 35, 987-1003, 1988.
- [7] E. Ott, *Chaos in dynamical systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [8] M.W. Hirsch and S. Smale, *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*, Academic Press, New York, 1974.

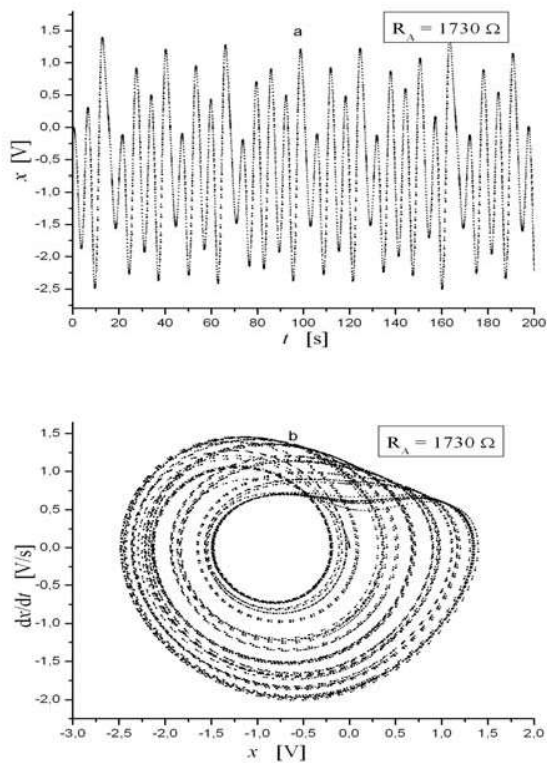


Figura 5. Resultados de la simulación numérica para un valor de $R_A = 1730 \Omega$ o $A = 0,58$, periodo-6, (a) respuesta temporal, (b) atractor.

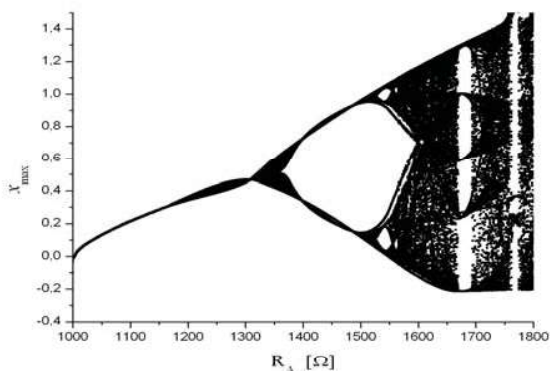


Figura 6. Diagrama de bifurcación de la ecuación jerk

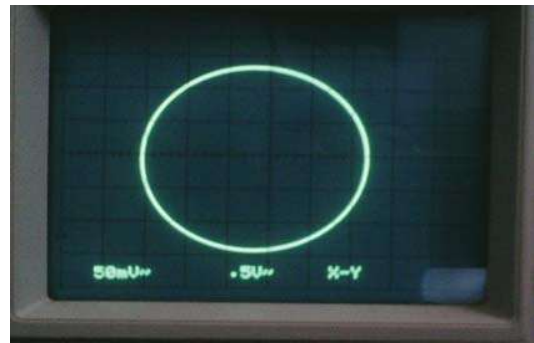


Figura 7. Resultado experimental, atractor para un valor de $R_A = 1200 \Omega$ o $A = 0,83$, periodo-1.

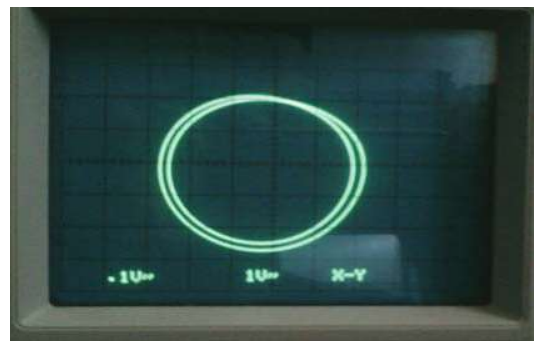


Figura 8. Resultado experimental, atractor para un valor de $R_A = 1450 \Omega$ o $A = 0,69$, periodo-2.

- [9] V. Patidar and K.K. Sud, "Bifurcation and chaos in simple jerk dynamical systems," *Indian Academy of Sciences, Journal of Physics*, 64(1), 75-93, 2005.
- [10] R. Kiliç and F. Yildirim-Dalkiran, "Programmable design and implementation of a chaotic system utilizing multiple nonlinear functions," *Turk J Elec. Eng. & Comp. Sci.*, 18(4), 647-655, 2010.
- [11] J.C. Sprott, "Some simple chaotic flow," *Phys Rev E*, 50(2), 647-650, 1994.
- [12] H.P.W. Gottlieb, "Question #38. What is the simplest jerk function that gives chaos?," *Am. J. Phys.*, 64(5), 525, 1996.
- [13] Zhang and J. Heidel and R. Le Borne, "Determining nonchaotic parameter regions in some simple chaotic jerk functions" *Chaos, Solitons and Fractals*, 36(4), 862-873, 2008.
- [14] S.H. Schot, "Jerk: The time rate of change of the acceleration,"



Figura 9. Resultado experimental, atractor para un valor de $R_A = 1550 \Omega$ o $A = 0,65$, periodo-4.

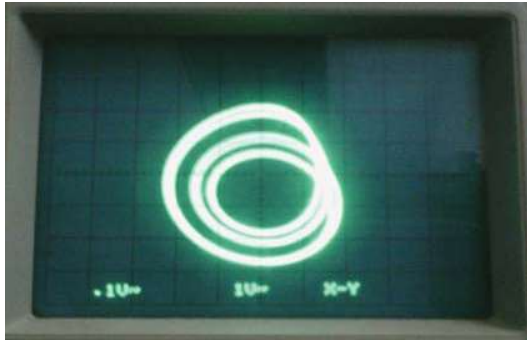


Figura 10. Resultado experimental, atractor para un valor de $R_A = 1730 \Omega$ o $A = 0,58$, periodo-6.

- Am. J. Phys.*, 46, 1090-1094, 1978.
- [15] T.R. Sandin, "The Jerk," *Phys. Teach.*, 20, 36-40, 1990.
- [16] J.C. Sprott, "Some simple chaotic jerk functions," *Am. J. Phys.*, 65(6), 537-543, 1997.
- [17] S.J. Linz, "Nonlinear dynamical models and jerky motion," *Am. J. Phys.*, 65(6), 523-526, 1997.
- [18] H.P.W. Gottlieb, "Some simple jerk functions with periodic solutions," *Am. J. Phys.*, 66, 893-906, 1996.
- [19] S.J. Linz and J.C. Sprott, "Elementary Chaotic Flows," *Physics Letters A*, 259, 240-245, 1999.
- [20] J.C. Sprott, "A new class of chaotic circuit," *Physics Letters A*, 266(1), 19-23, 2000.
- [21] J.C. Sprott and S. J. Linz, "Algebraically Simple Chaotic Flows," *Int. of Chaos Theory and Applications*, 5(2), 3-22, 2000.
- [22] M Feigenbaum, "Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations," *J. Stat. Phys.*, 19, 25-52, 1978.