

# PLANTA DE ENSAYO PARA DESARROLLO DE DIFERENTES TÉCNICAS DE CONTROL MODERNO APLICADAS A UN SISTEMA DE PÉNDULO INVERTIDO

*Jaime Castelló Moreno, José Miguel Espi Huerta, Rafael García Gil*

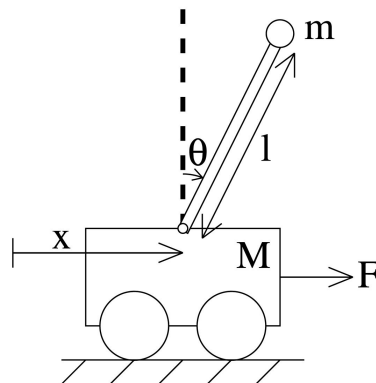
*Universidad de Valencia.  
e-mail: Jaime.Castello@uv.es*

## RESUMEN

El control del péndulo invertido es un problema clásico de la teoría de control. En este trabajo se presenta un sistema de péndulo invertido de gran versatilidad y coste unitario reducido que en la actualidad, forma parte de una asignatura de laboratorio de teoría de control, de ciclo superior de Ingeniería Electrónica. El objetivo principal de este trabajo, desde un punto de vista docente, es el de proveer a cada alumno y de forma individual, de un buen banco de pruebas para que pueda poner en práctica, los conocimientos teóricos que haya adquirido a lo largo de la asignatura sobre las diferentes técnicas de control analógico y digital para sistemas multivariable.

## 1. INTRODUCCIÓN

El sistema de péndulo invertido propuesto ha sido desarrollado en forma de coche tal y como se aprecia en la figura 1. Consta de cuatro ruedas de goma y un motor DC encargado de mover el eje trasero mediante un juego de ruedas dentadas.



*Figura 1. Sistema de péndulo invertido.*

Sobre la superficie central del chasis, se ha colocado una varilla rígida intercambiable solidaria a un potenciómetro de sensado de muy bajo rozamiento. El movimiento de la varilla sólo es posible en la dirección de avance o retroceso del coche, de manera que podrá mantenerse en equilibrio si el motor es gobernado de manera adecuada. Para conseguir mantener la varilla en posición vertical incluso ante perturbaciones, se requieren cuatro variables para realizar una realimentación de estado. Dichas variables de estado son respectivamente, la posición del eje trasero del coche  $x$ , el ángulo de la varilla  $\theta$ , la velocidad de giro del eje trasero  $\dot{x}$  y la velocidad de movimiento de la varilla  $\dot{\theta}$ . La posición del eje trasero se obtiene mediante un potenciómetro idéntico al empleado para medir la posición angular de la varilla. Las dos velocidades se podrían obtener directamente mediante tacómetros o sensores especiales. Sin embargo, estas dos variables también pueden ser

estimadas mediante un observador partiendo de las dos medidas de posición comentadas. Con las cuatro variables se realiza la realimentación de estado obteniendo finalmente mediante el diseño de un controlador, la señal encargada de gobernar al motor. La materialización de todo este control ha sido realizada en formato digital mediante el uso de un microcontrolador de gran popularidad.

## 2. MODELIZACIÓN DEL PÉNDULO INVERTIDO

Las ecuaciones dinámicas no lineales del péndulo invertido [1][2][3] son,

$$\ddot{x} = \frac{F - m g \sin \theta \cos \theta + m l \theta^2 \sin \theta}{M + m \sin^2 \theta}$$

$$\ddot{\theta} = \left(\frac{3}{4}\right) \frac{-F \cos \theta + (M + m) g \sin \theta - m l \theta^2 \sin \theta \cos \theta}{l(M + m \sin^2 \theta)}$$

donde  $m$  es el centro de masas de una varilla homogénea de longitud  $2l$ ,  $M$  es la masa del coche y  $F$  es la fuerza horizontal aplicada. Asumiendo que variaciones del ángulo van a ser pequeñas y lentas se obtienen las ecuaciones linealizadas,

$$\ddot{x} = \frac{F}{M} - \frac{m}{M} g \theta$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-3F}{4lM} + \left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{3g}{4l} \theta$$

El par generado por el motor,  $T$ , es proporcional a la corriente de armadura  $i_a$ ,

$$T = K_1 i_a = F r$$

siendo  $r$  el radio de la rueda. La tensión aplicada al motor es,

$$e = i_a (R_a + L_a s) + K_2 \omega$$

donde  $R_a$  y  $L_a$  son respectivamente la resistencia y la inductancia del motor y  $\omega$  es la velocidad angular. Despreciando el valor de la inductancia se obtiene finalmente,

$$F = \frac{K_1}{r R_a} e - \frac{K_1 K_2}{r^2 R_a} \dot{x}$$

donde  $K_1$  y  $K_2$  son las constantes del motor. El vector de estado del sistema lo definimos del siguiente modo,

$$X = (K_a \theta, K_x x, K_\omega \dot{\theta}, K_v \dot{x})^T$$

Las ecuaciones linealizadas del sistema péndulo-motor tienen la forma,

$$\dot{X} = AX + Bu$$

y considerando la ganancia en tensión del driver del motor,

$$e = 2u$$

donde,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{K_a}{K_\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{K_x}{K_v} \\ a \frac{K_\omega}{K_a} & 0 & 0 & b \frac{K_\omega}{K_v} \\ c \frac{K_v}{K_a} & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2f K_\omega \\ 2h K_v \end{pmatrix}$$

siendo,

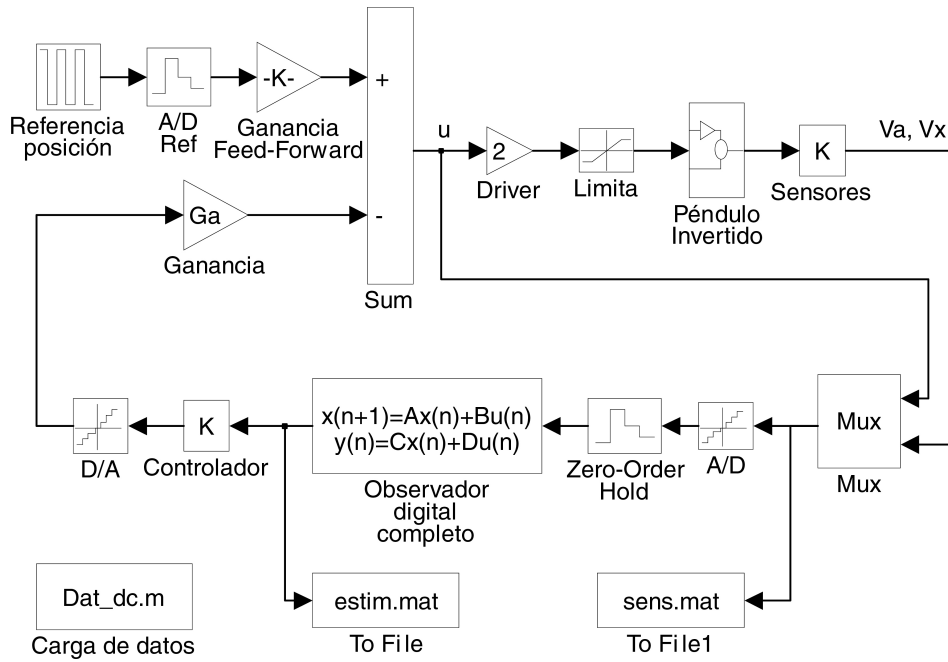
$$a = \left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{g}{l} \quad b = \frac{K_1 K_2}{l M r^2 R_a} \quad c = \frac{-m g}{M}$$

$$d = \frac{-K_1 K_2}{r^2 R_a M} \quad f = \frac{-K_1}{l M r R_a} \quad h = \frac{K_1}{r R_a M}$$

### 3. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA

El diagrama de bloques del sistema se muestra en la figura 2. Los únicos componentes digitales empleados han sido el microcontrolador PIC16F873 de la firma MicroChip y el convertidor D/A de 8 bits DAC0808. Los convertidores A/D están integrados en el propio microcontrolador (cinco canales analógicos independientes de 10 bits de resolución). Este dispositivo permite además de esta importante función, el proceso digital propiamente dicho, es decir la implementación de los bloques controlador y observador de estado. La tarea de diseño consiste en definitiva en el cálculo de los coeficientes que definen el comportamiento del controlador y el observador, empleando para ello cualquiera de las opciones estudiadas en el módulo de teoría de la asignatura. Dichos coeficientes serán incluidos en el código fuente del programa que una vez compilado servirá para programar el microcontrolador.

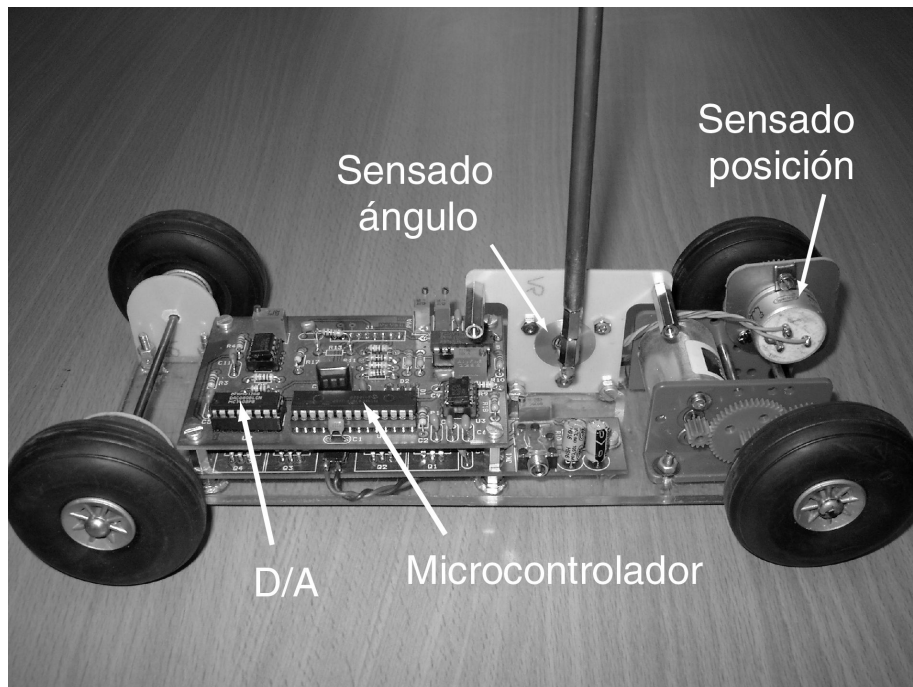
El resto del hardware empleado es de tipo analógico, en concreto el driver del motor, las ganancias de los sensores y otra serie de circuitos auxiliares de acondicionamiento y alimentación no incluidos en el diagrama de bloques de la figura 2. El driver del motor se ha realizado empleando un puente completo con dos seguidores push-pull en contrafase, motivo por el cual, la tensión  $e$  que le llega realmente al motor es el doble de la tensión de comando  $u$ .



**Figura 2.** Diagrama de bloques del sistema

La ganancia de sensado del ángulo  $K_a$  se ha diseñado de manera que cubre el rango dinámico de entrada del convertidor A/D (0 a 5V) para un recorrido de la varilla de  $\pm 40^\circ$  con respecto a la vertical. La transmisión desde el eje trasero del coche hasta el eje del potenciómetro de sensado de posición se realiza mediante un juego de ruedas dentadas con una relación 4:1. De este modo, un giro completo del eje de dicho potenciómetro se consigue cuando las ruedas del coche han dado cuatro vueltas. La ganancia de sensado de posición  $K_x$  se ha obtenido de modo que un giro completo del potenciómetro de sensado de posición se corresponde con el máximo rango dinámico de entrada del convertidor A/D del microcontrolador.

La transmisión desde el eje del motor hasta el eje trasero del coche se ha realizado empleando un juego de ruedas dentadas con una relación 16:1, reduciendo de este modo la velocidad y aumentando el par. En la figura 3 se puede apreciar con detalle el aspecto final del sistema.



*Figura 3. Péndulo invertido*

#### **4. CONCLUSIONES**

El sistema de péndulo invertido presentado reúne muchas de las características deseables para su uso en aplicaciones docentes y de investigación. Por un lado, es indudable que en funcionamiento tiene un gran atractivo visual que convierte a este módulo impartido en uno de los predilectos por el alumnado. Es importante resaltar la gran exactitud del modelo de la planta obtenido puesto que las simulaciones realizadas en todos los casos se asemejan con un alto grado de fidelidad con el comportamiento real del sistema. El control discreto dota al sistema de gran versatilidad, puesto que el mismo hardware sirve para diferentes estrategias de control. La programación del microcontrolador se realiza mediante herramientas de gran difusión y en un lenguaje de alto nivel (C standard). Su reducido coste y el hecho de haber empleado componentes standard para su construcción hace que sea posible replicar múltiples coches todos con idéntico comportamiento. Se ha previsto la opción de cambiar con suma facilidad la varilla del péndulo (sistema enroscable). Esto es interesante puesto que se pueden construir varillas con diferentes longitudes y materiales de manera que cada alumno deberá resolver el mismo problema pero con datos distintos.

#### **5. BIBLIOGRAFÍA**

- [1] William L. Brogan. "Modern Control Theory", Prentice-Hall, Third Edition, 1991.
- [2] Bahram Shahian, Michael Hassul. "Control System Design Using Matlab", Prentice-Hall, 1993.
- [3] Katsuhiko Ogata. "Ingeniería de Control Moderna", Prentice-Hall, Segunda Edición, 1993.